

УДК: 796.9

Численное моделирование внешнего обтекания спортсмена

В. В. Жаркова^a, А. Е. Щеляев^b, Ю. В. Фишер^c

ООО «ТЕСИС»,

Россия, 127083, г. Москва, ул. Юннатов, д. 18

E-mail: ^a lera@flowvision.ru, ^b alex@flowvision.ru, ^c jf@flowvision.ru

Получено 06.12.2016, после доработки — 16.01.2017.

Принято к публикации 03.03.2017.

В работе описывается численное моделирование процесса внешнего обтекания подвижного спортсмена с целью определения его интегральных характеристик при различных режимах набегающего потока и режимах его движения. Численное моделирование выполнено с помощью программного комплекса вычислительной гидродинамики FlowVision, построенного на решении набора уравнений, описывающих движение жидкости и/или газа в расчетной области, в том числе уравнений сохранения массы, импульса и энергии, уравнений состояния, уравнений моделей турбулентности. Также учитываются подвижные границы расчетной области, изменяющаяся геометрическая форма которых моделирует фазы движения спортсмена, при прохождении трассы. Решение системы уравнений выполняется на декартовой сетке с локальной адаптацией в области высоких градиентов давлений или сложной геометрической формы границы расчетной области. Решение уравнений выполняется с помощью метода конечных объемов, с использованием расщепления по физическим процессам. Разработанная методика была апробирована на примере спортсменов, совершающих прыжки на лыжах с трамплина, в рамках подготовки к Олимпиаде в Сочи в 2014 году. Сравнение результатов численного и натурного эксперимента показало хорошую корреляцию. Технология моделирования состоит из следующих этапов:

1) разработка постановки задачи внешнего обтекания спортсмена в обращенной постановке, где неподвижный объект исследования обтекается набегающим потоком, со скоростью, равной скорости движения объекта;

2) разработка технологии изменения геометрической формы границы расчетной области в зависимости от фазы движения спортсмена; разработка методики численного моделирования, включающей в себя определение дискретизации по времени и пространству за счет выбора шага интегрирования и измельчения объемной расчетной сетки;

3) проведение серии расчетов с использованием геометрических и динамических данных спортсмена из сборной команды.

Описанная методика универсальна и применима для любых других видов спорта, биомеханических, природных и подобных им технических объектов.

Ключевые слова: аэродинамика, численное моделирование, FlowVision, прыжки на лыжах с трамплина

Работа выполнена при поддержке Министерства спорта РФ.

UDC: 796.9

Numerical simulation of sportsman's external flow

V. V. Zharkova ^a, A. E. Schelyaev ^b, Yu. V. Fisher ^c

Ltd. «TESIS»,
18 Yunnatov st., Moscow, 127083, Russia

E-mail: ^alera@flowvision.ru, ^balex@flowvision.ru, ^cjf@flowvision.ru

*Received 06.12.2016, after completion — 16.01.2017.
Accepted for publication 03.03.2017.*

Numerical simulation of moving sportsman external flow is presented. The unique method is developed for obtaining integral aerodynamic characteristics, which were the function of the flow regime (i.e. angle of attack, flow speed) and body position. Individual anthropometric characteristics and moving boundaries of sportsman (or sports equipment) during the race are taken into consideration.

Numerical simulation is realized using FlowVision CFD. The software is based on the finite volume method, high-performance numerical methods and reliable mathematical models of physical processes. A Cartesian computational grid is used by FlowVision, the grid generation is a completely automated process. Local grid adaptation is used for solving high-pressure gradient and object complex shape. Flow simulation process performed by solutions systems of equations describing movement of fluid and/or gas in the computational domain, including: mass, moment and energy conservation equations; state equations; turbulence model equations. FlowVision permits flow simulation near moving bodies by means of computational domain transformation according to the athlete shape changes in the motion. Ski jumper aerodynamic characteristics are studied during all phases: take-off performance in motion, in-run and flight. Projected investigation defined simulation method, which includes: inverted statement of sportsman external flow development (velocity of the motion is equal to air flow velocity, object is immobile); changes boundary of the body technology defining; multiple calculations with the national team member data projecting. The research results are identification of the main factors affected to jumping performance: aerodynamic forces, rotating moments etc. Developed method was tested with active sportsmen. Ski jumpers used this method during preparations for Sochi Olympic Games 2014. A comparison of the predicted characteristics and experimental data shows a good agreement. Method versatility is underlined by performing swimmer and skater flow simulation. Designed technology is applicable for sorts of natural and technical objects.

Keywords: computational fluid dynamics, aerodynamics, numerical simulation, CFD, speed skating, ski jumping, swimming

The work is executed at support of the Ministry of sports of Russia.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 331–344 (Russian).

1. Введение

Современные высокотехнологические спортивные дисциплины, такие как прыжки на лыжах с трамплина, требуют значительного внимания к аэродинамическому совершенству спортсмена, которое зависит от его индивидуальных антропометрических данных. Получить индивидуальные аэродинамические характеристики спортсмена во время совершения им прыжка можно двумя способами.

Первый способ основан на экспериментальных продувках в аэродинамических трубах. Такие исследования в России применялись еще в 1960-х годах [Грозин, 1971]. Тогда обдували не самих спортсменов, а их уменьшенные фигурки, имитирующие фазу полета. Сегодня к недостаткам этого метода можно отнести невозможность спортсменом полностью повторить ту позу, которую он занимает во время прыжка, необходимость отрыва спортсменов от тренировочного процесса, трудность обеспечения безопасности проведения эксперимента, дороговизну подобных исследований. К тому же аэродинамические трубы, пригодные для исследований на людях, расположены главным образом за границей и чаще всего заняты под нужды собственных команд.

Второй способ, лишенный перечисленных недостатков, заключается в использовании технологии математического моделирования процесса внешнего обтекания спортсмена. Плюсами данного способа являются учет индивидуальных антропометрических данных, возможность рассмотреть все фазы движения спортсмена (например, разгон на столе, совершение отталкивания от стартового стола и затяжной прыжок) в движении, оценить вклад каждой части тела спортсмена, а также влияние свойств материалов комбинезона и шлема спортсмена на его аэродинамическое качество. Визуализация во время моделирования помогает увидеть картину течения и найти взаимосвязи между формой или положением исследуемого объекта и его аэродинамическим качеством. Ведь для стабильных побед требуется точное понимание физических процессов, ведущих к высоким результатам.

На основании численных исследований можно определить оптимальную траекторию движения по трассе, найти оптимальное положение тела спортсмена в каждый конкретный момент движения с учетом внешних факторов, определить идеальные антропометрические данные, необходимые для конкретного вида спорта.

Применение численного моделирования в спорте высоких достижений широко распространено за рубежом. Лидерами в данных областях традиционно считаются Англия, Германия и США [Norstrud, 2008; Schenau, 1982; Mössner, 2011]. Перечень наград, упомянутых трех стран, в различных спортивных международных соревнованиях специалисты напрямую соотносят с достижениями в области вычислительной аэродинамики. Исследованиями лыжников занимались такие страны, как Скандинавия, Финляндия и Швейцария, которые рассматривали отдельные аспекты движения лыжника по трассе, например изучение фазы отрыва спортсмена [Virmavirtaa, 2001], определение сил в фазе разгона [Logar, 2015], взаимодействия лыж с поверхностью трамплина [Federolf, 2005] или изучение аэродинамики стабильности [Маркес, Гримшоу, 2010].

В отечественной практике внедрение инструментов трехмерного математического моделирования носит очаговый характер в силу экономических ограничений и отсталости технологической базы. Применительно к спортивным достижениям все усилия отечественной школы прилагаются к таким дисциплинам, как траекторные исследования спортсменов на трассе по законам механики [Рудаков, 2007; Петров, 1974; Баталов, 1998], а также численные продувки для определения только аэродинамических сил и моментов в квазинестационарном положении спортсмена на траектории [Подгаец, 2000, Рудаков, 2000].

Отличительными особенностями методики, предложенной в данной статье, являются использование подвижных моделей спортсменов, персонализированное моделирование (под каждого конкретного спортсмена) и рассмотрение полного цикла попытки спортсмена (разгон, отрыв и прыжок).

2. Описание методики исследования

В рамках подготовки к Олимпиаде в Сочи в 2014 году инженерно-техническим коллективом компании «ТЕСИС» была проведена исследовательская работа [Разработка методики оценки влияния аэродинамических факторов на траекторию движения спортсмена при прыжках на лыжах с трамплина, 2012] по выявлению значимых силовых факторов, влияющих на скорость движения и дальность прыжка спортсмена-лыжника. Результатом работы стала методика высокой степени технической зрелости, которая может быть применена в практической работе при подготовке спортивных сборных команд.

Этапы реализации методики базируются на перечисленных ниже блоках.

1. Оптическое лазерное сканирование трассы и подвижных спортсменов. Результатом сканирования стали геометрические обводы трассы (в качестве основы для моделирования) и трехмерные электронно-цифровые модели спортсменов с учетом их антропометрических данных.

2. Разработка постановки задачи внешнего обтекания спортсмена, технологии изменения геометрической формы границы расчетной области (в зависимости от фазы движения спортсмена и методики численного моделирования).

3. Проведение серии виртуальных продувок подвижных спортсменов на основании полученных моделей (п. 1).

4. Определение скорости движения спортсмена по трассе и дальности прыжка на основании полученных аэродинамических нагрузок, внешних условий (температура, влажность, давление) и коэффициентов трения лыж, рассчитанных под данную геометрию и внешние условия.

Результатом расчетов стало определение всех значимых сил, влияющих на скорость и дальность прыжка спортсмена.

Методика была продемонстрирована на примере прыжков на лыжах с трамплина. Отдельные элементы методики также применялись для конькобежного спорта [Методика совершенствования технической подготовленности высококвалифицированных спортсменов зимних видов спорта с учетом аэродинамических факторов, 2011] и плавания.

3. Разработка постановки задачи внешнего обтекания спортсмена

Численное моделирование внешнего обтекания спортсмена выполнялось с помощью программного комплекса вычислительной гидродинамики FlowVision. Математическая постановка задачи содержит в себе набор решаемых уравнений и замыкающих зависимостей — граничных условий. В расчете использовались следующие уравнения.

– *Уравнения движения* — уравнение Навье–Стокса (уравнение неразрывности (1) и уравнение импульсов (2)), записанное в форме конвективно-диффузионного переноса, — описывают движения жидкости/газа.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\bar{\nabla} P + \bar{\nabla} \cdot \hat{\tau}_{eff} + S, \quad (2)$$

$$\tau_{eff} = (\mu + \mu_t) \left(2\hat{S} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\hat{I} \right), \quad (3)$$

где t — время, ρ — плотность, \mathbf{V} — скорость, P — статическое давление, S — фактор, учитывающий внешние силы, μ — молекулярный коэффициент динамической вязкости, μ_t — турбулентный коэффициент динамической вязкости.

– *Уравнения стандартной k - ϵ модели турбулентности* моделируют турбулентный массо- и теплоперенос. Итогом расчета уравнений является турбулентная вязкость, которая затем под-

ставляется в уравнения Навье–Стокса. Данная модель необходима для разрешения турбулентных течений и учета изменения трения на границах модели спортсмена.

Для стандартной k - ε модели турбулентная динамическая вязкость выражается через величины k и ε следующим образом:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Величины турбулентной вязкости k и скорости ее диссипации ε определяются выражениями

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}k) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \mu_t G - \rho \varepsilon - \Phi_k, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}\varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t G - C_2 f_1 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \Phi_\varepsilon, \quad (6)$$

где k — турбулентная энергия, ε — скорость диссипации турбулентной энергии, $C_\mu = 0.09$ — фиксированная модельная константа.

Подробное описание используемых уравнений и моделей приведено в [FlowVision — руководство пользователей].

Движение лыжника по трамплину было разделено на 3 характерных участка, для каждого из которых была подготовлена своя постановка задачи:

- 1) фаза разгона;
- 2) фаза отталкивания со стола отрыва;
- 3) фаза полета.

Наиболее интересным с точки зрения моделирования являлся участок отталкивания со стола отрыва, поэтому основной акцент в статье был сделан на него.

Решение задач осуществляется в обращенной постановке, где неподвижные модели спортсмена обдуваются набегающим потоком со скоростью, равной скорости движения спортсмена.

Для расчета аэродинамических характеристик модель спортсмена помещается в расчетную область, которая подбирается индивидуально под каждую группу задач. На рис. 1 показан вариант расчетной области для моделирования спортсмена в фазе отталкивания.

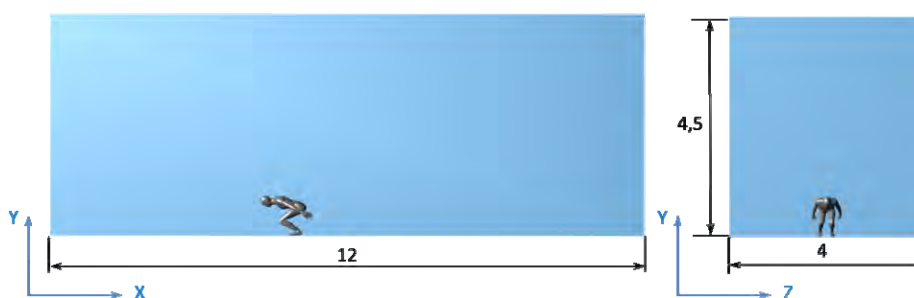


Рис. 1. Конфигурация расчетной области, размеры заданы в метрах

В объеме расчетной области устанавливаются начальные условия в соответствии с параметрами внешней среды (вектор скорости набегающего потока, давление, температура). На всех границах расчетной области расставляются граничные условия, описывающие математическую постановку задачи. Расстановка граничных условий показана на рис. 2.

При решении задач в обратной постановке необходимо исключить образование пограничного слоя на поверхности, вдоль которой движется поток. Для этого используется ГУ «симметрия», позволяющее моделировать проскальзывание скорости.

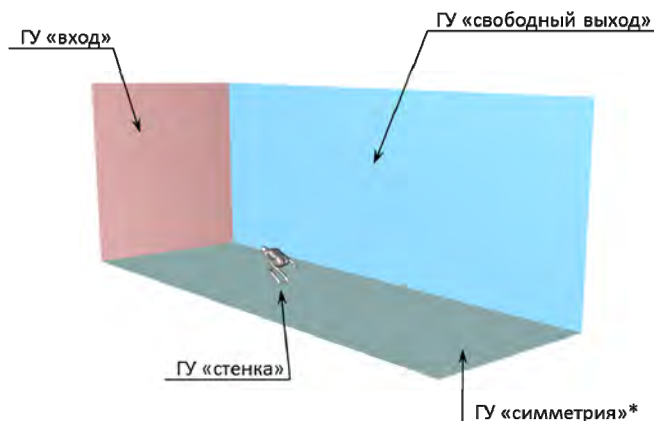


Рис. 2. Расстановка граничных условий в расчетной области (на примере лыжника в позе разгона), * — в фазе полета данное ГУ заменяется на ГУ «вход»

ГУ «вход» задает значения скоростей и/или давлений на границе расчетной области. На трех поверхностях расчетной области, не показанных на рисунке, установлено ГУ «свободный выход», предполагающее фиксированное статическое давление и возможность входа/выхода газа через соответствующие границы. На модели лыжника задается условие «стенка», на котором реализуется условие непроницаемости и прилипания для переменной скорости.

В процессе моделирования движения геометрическая модель спортсмена автоматически заменяется последовательностью полученных сканов через заданное количество итераций. Движение лыжника относительно расчетной сетки делает необходимым автоматическое построение расчетной сетки в ходе расчета проекта для согласования сетки с новыми границами расчетной области.

Важным этапом расчета является определение дискретизации по времени и пространству за счет выбора шага интегрирования и измельчения объемной расчетной сетки. С одной стороны, расчетная сетка должна разрешить все аэродинамические особенности течения вокруг спортсмена, с другой — сетка не должна быть избыточной, поскольку измельчение сетки требует увеличение частоты кадров, полученных в результате движения спортсмена. Данное условие связано с требованием FlowVision к неразрывности решения, т. е. изменение границ расчетной области за одну итерацию не должно быть больше, чем на одну ячейку расчетной сетки.

Во FlowVision используется декартова сетка из прямоугольных ячеек, генерация которой полностью автоматизирована. Вблизи границы расчетной области происходит булево вычитание нерасчетных объемов из прямоугольных ячеек, в результате которого образуются ячейки-многогранники произвольной формы. Никакого упрощения приграничных ячеек не производится.

Локальная адаптация начальной сетки производится в соответствии с заданными критериями. Под адаптацией понимается сгущение сетки методом разбиения каждой ячейки сетки пополам по каждой оси системы координат. Адаптация может применяться как к ячейкам начальной сетки, так и к уже проадаптированным ячейкам. Ячейкой или сеткой нулевого уровня называют начальную сетку, не содержащую адаптированные ячейки. Ячейкой, или сеткой, 1-го уровня называют ячейки, полученные путем адаптации ячеек нулевого уровня, и т. д.

Для выбора подходящей расчетной сетки на одном из кадров движения было проведено исследование влияния степени дискретизации. В процессе подобного исследования проводится серия расчетов одной и той же задачи на последовательности сеток, где каждая из последующих отличается от предыдущей степенью дискретизации (сгущения в области исследуемого объекта).

В процессе итерационного выхода на установившийся режим течения осуществляется анализ поведения подъемной силы и силы лобового сопротивления. Для решения была выбрана наименьшая по размерности сетка, когда различия между значениями сил, полученных на соседних сетках, не превышали 1.5 %. Итоговая сетка показана на рис. 3.

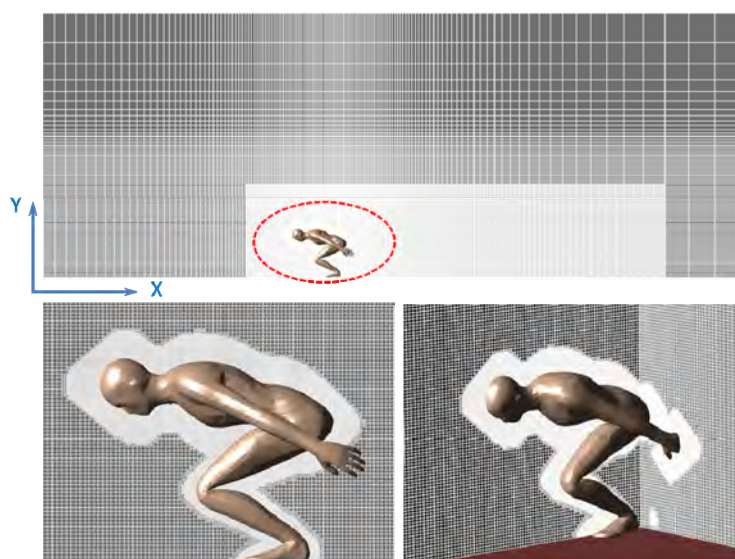


Рис. 3. Выбранная расчетная сетка

Она состоит из неравномерной начальной сетки, сгущенной в области исследуемого объекта, пространственной адаптации 1-го уровня по параллелепипеду и адаптации по модели спортсмена (по граничному условию «стенка») 3-го уровня в 20 слоев ячеек.

Шаг интегрирования обусловлен частотой замены геометрической модели спортсмена.

4. Аэродинамические исследования

В ходе проведения исследований были получены качественные и количественные результаты. Комплексная оценка аэродинамического влияния является суперпозицией качественной и количественной оценок и позволяет рассмотреть процесс обтекания исследуемого объекта наиболее полно.

Оценка аэродинамического влияния осуществляется методом оценки силы аэродинамического сопротивления, действующей на тело спортсмена. Оценка построена на вычислении интеграла по поверхности корпуса спортсмена по переменной давления и переменной касательного напряжения.

$$F_{fluid} = \oint_S (P + P_{hst}) n dS - \oint_S (\mu + \mu_t) \frac{\partial V}{\partial n} dS, \quad (7)$$

где P — давление, P_{hst} — гидростатическое давление (для воздуха можно пренебречь), μ — ламинарная вязкость, μ_t — турбулентная вязкость, V — скорость, n — местная нормаль к поверхности. При вычислении данного интеграла на каждом шаге интегрирования вычисляется значение силы сопротивления.

Отличительной чертой инструментов математического анализа является возможность проводить декомпозицию общей силы сопротивления на составные части: силу, обусловленную давлением (8), и силу, обусловленную трением (9). Также имеется возможность проводить анализ не только степени влияния трения и давления, но и разложения их по компонентам основных осей XYZ.

$$\Sigma_f = \int_S f \cdot n \cdot dS, \quad (8)$$

$$F_{трения} = F_{общая} - \Sigma_f. \quad (9)$$

Качественная оценка структуры течения проводилась по переменным давления и скорости. Визуализация поля давления позволила определить точки торможения потока, в которых основной вклад в силу сопротивления вносится за счет давления. Анализ структуры потока по переменной скорости выявил зоны максимального разгона потока и структуру течения вокруг спортсмена, а также вклад различных участков поверхности модели спортсмена в общую картину течения (рис. 4).

Точки торможения потока дают значительный вклад в силу лобового сопротивления за счет сил давления. Зоны повышенного давления, расположенные на корпусе спортсмена, показаны на рис. 7. Сильное сопротивление давления создают лобная часть головы, плечи и колени лыжника. Минимизировать коэффициент лобового сопротивления в данных областях можно путем снижения амплитуды давления и площади зоны торможения.

На рис. 5 показаны распределения давлений по корпусу спортсменов, имеющих различные антропометрические данные. Спортсмен Б имеет более развитую трапециевидную мышцу, благодаря чему при прочих равных условиях улучшается его аэродинамическое качество.

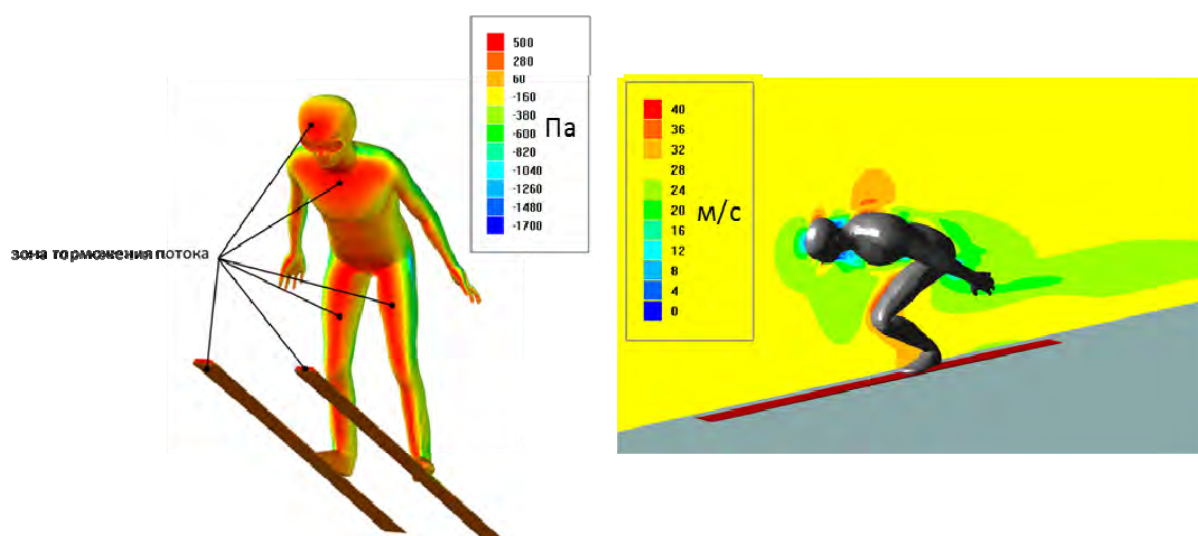


Рис. 4. Пример визуализации полей давления (слева), Па, и скорости (справа), м/с (цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала)

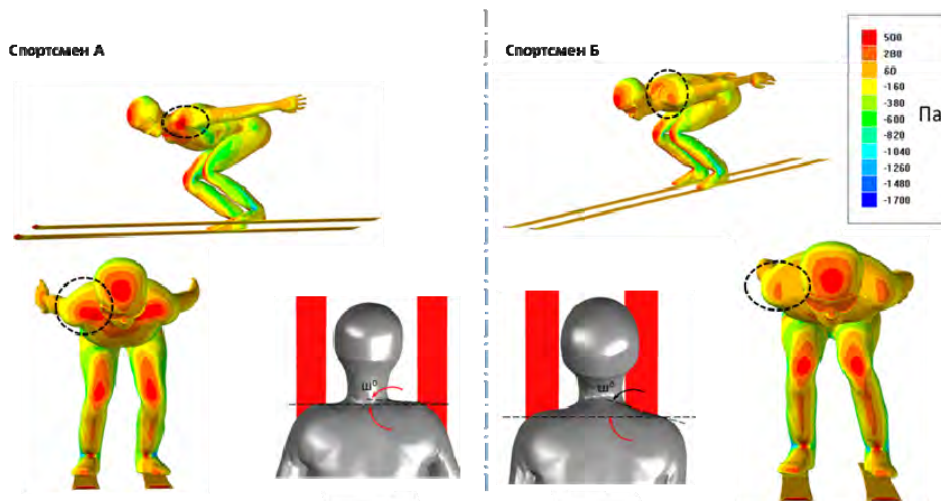


Рис. 5. Влияние антропометрических данных спортсмена на его аэродинамические качества: распределение давления по корпусу лыжников, Па. Благодаря более развитой трапециевидной мышце спортсмен Б имеет меньшее аэродинамическое сопротивление в области плеч и большее аэродинамическое качество (цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала)

Рис. 6 показывает структуру течения в окрестности движущегося лыжника, позволяя оценить степень отклонения вектора потока от исходного вектора набегающего потока. Подобные отклонения характеризуются как зоны вторичного течения (завихрения). Любое возникновение вихревой структуры на теле является следствием изменения местного направления течения под действием изменения местной кривизны поверхности спортсмена и, в свою очередь, свидетельствует об изменении сопротивления.

Основными зонами вихреобразования на теле лыжника являются: затылок, шея, тыльная часть руки и тазобедренная область спортсмена.

Значительный вклад в сопротивление трения вносят области, соприкасающиеся с максимально разогнанным потоком, которые обнаруживаются с помощью визуализации по переменной модуля вязких напряжений. Величина модуля вязких напряжений прямо пропорциональна интенсивности силы трения на различных участках поверхности: темные зоны соответствуют областям с минимальным влиянием силы трения, светлые зоны — областям с максимальным влиянием силы трения (рис. 7).

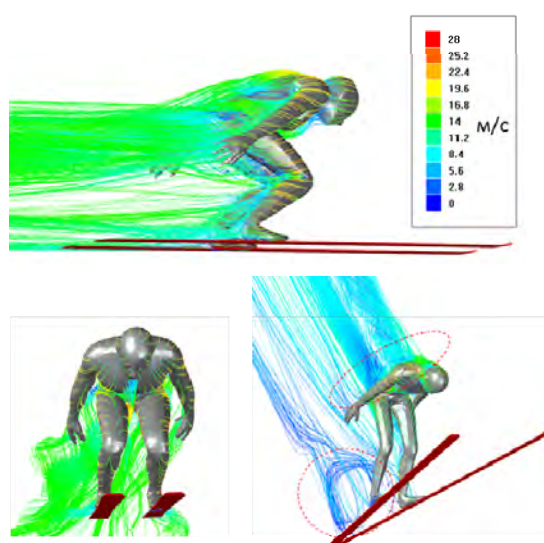


Рис. 6. Структура течения вокруг лыжника в фазе разгона со скоростью 100 км/ч (цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала)

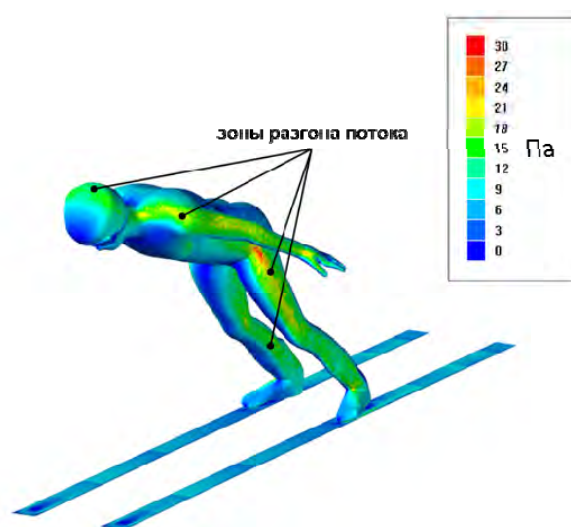


Рис. 7. Зоны разгона потока на модели спортсмена во время совершения прыжка. Визуализация модуля вязких напряжений, Па (цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала)

Таким образом, все фронтальные поверхности тела спортсмена вносят вклад в сопротивление давления, а все боковые — дают вклад в силу трения. Появление зон возникновения вторичных течений является косвенным показателем наличия сопротивления или его увеличения.

Качественный анализ взаимного расположения точек экстремума по каждой из переменной позволил определить следующие важные моменты:

- положение точек торможения потока, дающих значительный вклад в силу сопротивления за счет сил давления; в данных местах необходимо вносить изменения во внешнюю форму и стремиться снижать амплитуду давления и площадь торможения к минимуму;
- положения точек максимального разгона потока, дающих значительный вклад в силу сопротивления за счет сил трения; в данных местах необходимо вносить изменения во внешнюю форму объекта с целью увеличения участка разгона, а также применять материалы с низким значением коэффициента трения;
- положение участков поверхности геометрической модели, на которых возникают вторичные течения, отрывы, обратные циркуляционные зоны; в данных местах необходимо заполнять объемы пространства в окрестности поверхности геометрической модели в местах образования крупных вихрей, применять вставки в снаряжение спортсмена для устранения обратных уступов на поверхности геометрической модели;
- распределение местных углов атаки и скольжения, которые позволили строить прогноз по изменению кривизны поверхности исследуемого объекта для снижения его сопротивления.

5. Определение траектории движения

Для определения траектории движения лыжника, определения его скорости и ускорения, а также нахождения действующих на него сил была создана математическая динамическая модель. Исходными данными данной модели являются геометрические характеристики трамплина, аэродинамические, механические и массово-инерциальные характеристики спортсмена, значение силы толчка спортсмена при сходе со стола отрыва, полученные с тензоплатформы.

Во время движения в каждый момент времени на спортсмена действует следующая совокупность сил, определяющих основные траекторные характеристики материального объекта (рис. 8).

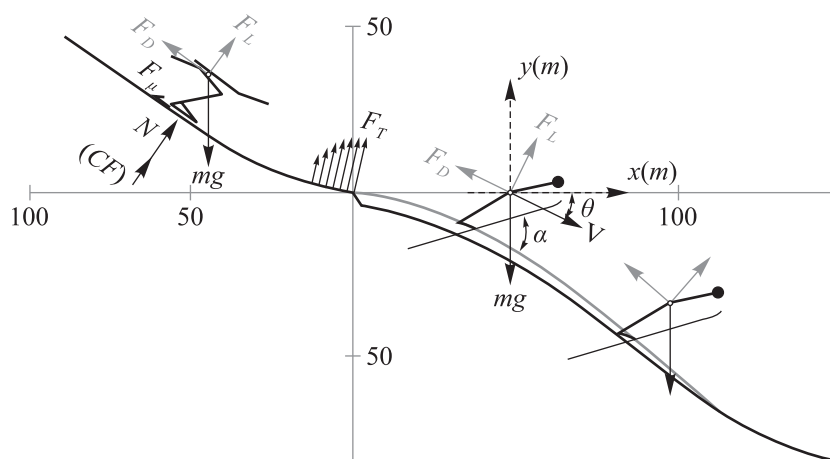


Рис. 8. Силы, действующие на систему «спортсмен–лыжи» в процессе движения: N — сила реакции опоры, mg — сила тяжести, CF — центробежная сила, F_{μ} — сила трения, F_D — сила аэродинамического сопротивления, F_L — подъемная сила, F_T — сила отталкивания спортсмена при прыжке, V — скорость движения спортсмена, θ — угол атаки корпуса спортсмена, α — угол атаки лыж

Равнодействующая этих сил определяет в каждый момент времени t результирующее ускорение $a(t)$ материального объекта по формуле (12):

$$a(t) = \frac{N + mg + CF + F_{\mu} + F_D + F_L + F_T}{m}, \quad (10)$$

где N — сила реакции опоры, mg — сила тяжести, CF — центробежная сила, F_{μ} — сила трения, F_D — сила аэродинамического сопротивления, F_L — подъемная сила, F_T — сила отталкивания спортсмена при прыжке.

Траектория движения лыжника определяется взаимодействием приведенных сил, которое зависит в первую очередь от характеристик геометрической формы трамплина.

При наличии односторонней связи (односторонней поверхности) нормальная реакция связи направлена по нормали к поверхности; косинусы углов, образованных направлением \bar{N} с осями координат, можно определить по формулам дифференциальной геометрии:

$$\cos(\bar{N}, i) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \quad \cos(\bar{N}, j) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \quad \cos(\bar{N}, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}, \quad (11)$$

где

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (12)$$

Результаты данной методики можно показать на примере изменения положения тела спортсмена на разгоне при прочих равных условиях. Пусть положение «разгон 1» является базовым, с ним будем сравнивать результаты, полученные для других положений тела на разгоне (рис. 9). Положение «разгон 2» характеризуется тем, что корпус спортсмена немного приподнят относительно предыдущего варианта.

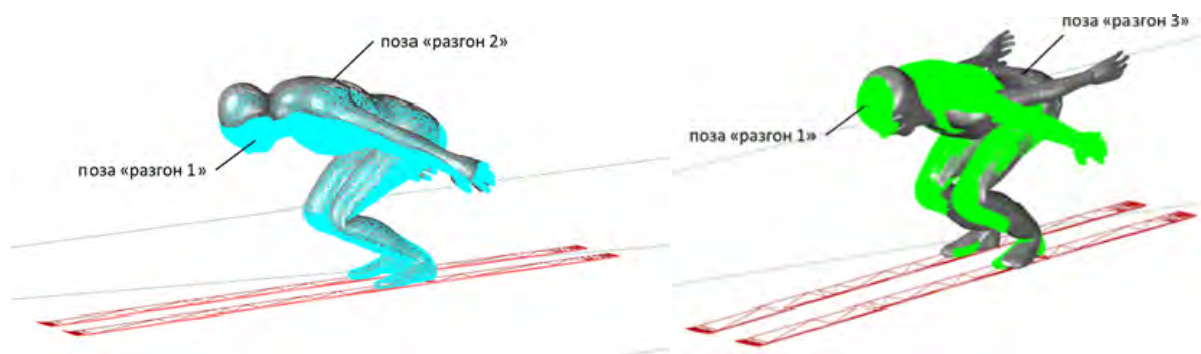


Рис. 9. Позы спортсмена на разгонном участке (цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала)

Увеличение площади омываемой поверхности спортсмена, характерное для позы «разгон 2», ведет к росту лобового сопротивления (около 15 %). Подъемная сила при этом практически не меняется, и, как следствие, аэродинамическое качество (K_{AD}) позы «разгон 2» существенно падает. Для фазы разгона параметр K_{AD} , важный для совершения полета, не существенен, так как спортсмен движется по поверхности трамплина, но подъемная сила будет вносить вклад в контактную силу трения лыжи на трамплине.

Составляющие сопротивления незначительно меняют свое соотношение по сравнению с положением «разгон 1». Основной вклад в силу сопротивления приходится на долю лыж-

ника, он составляет 83.72–84.5 % (что на 2.1–3.5 % больше, чем для позы «разгон 1», ввиду увеличения площади омываемой поверхности). Вклад трения спортсмена в общее сопротивление составляет 10.59–11.34 % (что на 1.3–2.7 % ниже предыдущего варианта). На долю давления и трения лыж приходится 2.62–2.67 % и 10.59–11.34 % соответственно, такое распределение сил на лыжах практически не отличается от распределения в варианте «разгон 1».

Основной вклад в подъемную силу вносит корпус спортсмена (около 93.34–94.25 %), что практически не отличается от предыдущего случая. В положении «разгон 2» (по сравнению с позой «разгон 1») при прочих равных условиях спортсмен теряет в дальности полета 1.58 м. Траектории прыжка для рассматриваемых поз спортсменов приведены на рис. 12. В положении спортсмена «разгон 3» (рис. 10) общее сопротивление оказывается значительно ниже, чем в вариантах, рассмотренных ранее. Данное понижение зависимости $v(x)$ объясняется тем, что благодаря уменьшению площади омываемой поверхности спортсмена упала сила сопротивления давления, которая формирует основной вклад в F_x . Анализируя качественное распределение давления по корпусу спортсмена в положениях «разгон 1» и «разгон 3», видим, что в позе «разгон 1» зоны повышенного давления имеются на руках и в паховой области лыжника (в положении «разгон 3» данные зоны отсутствуют). Области повышенного давления на коленях и плечах спортсмена в позе «разгон 1» также несколько больше, чем в положении «разгон 3» (рис. 10).

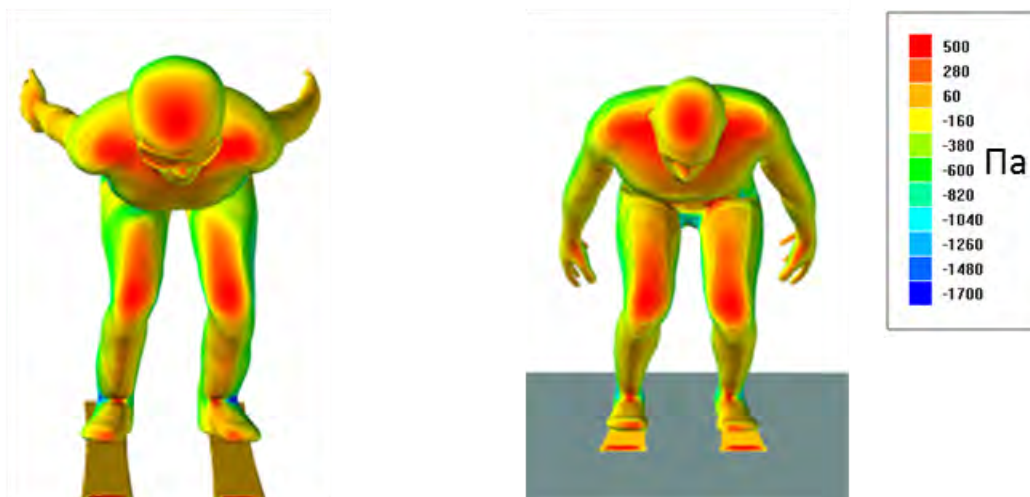


Рис. 10. Распределение давления по корпусу спортсмена в различных разгонных положениях ($v = 100$ км/ч), Па. Спортсмен в позе «разгон 3» — слева, в позе «разгон 1» — справа (цветная версия рисунка доступна в электронной версии статьи на сайте журнала)

Полученные траектории движения и дальность прыжка для рассмотренных разгонных поз представлены на рис. 11.

6. Заключение

Разработанная методика позволяет рассчитывать оптимальную траекторию движения спортсмена с учетом внешних воздействий, позволяет комплексно оценить факторы, дающие вклад в формирование силы сопротивления, действующей на спортсмена в процессе его движения по трассе, с оценкой относительной доли каждого из факторов. Методические результаты работы могут быть применены и к другим видам спорта.

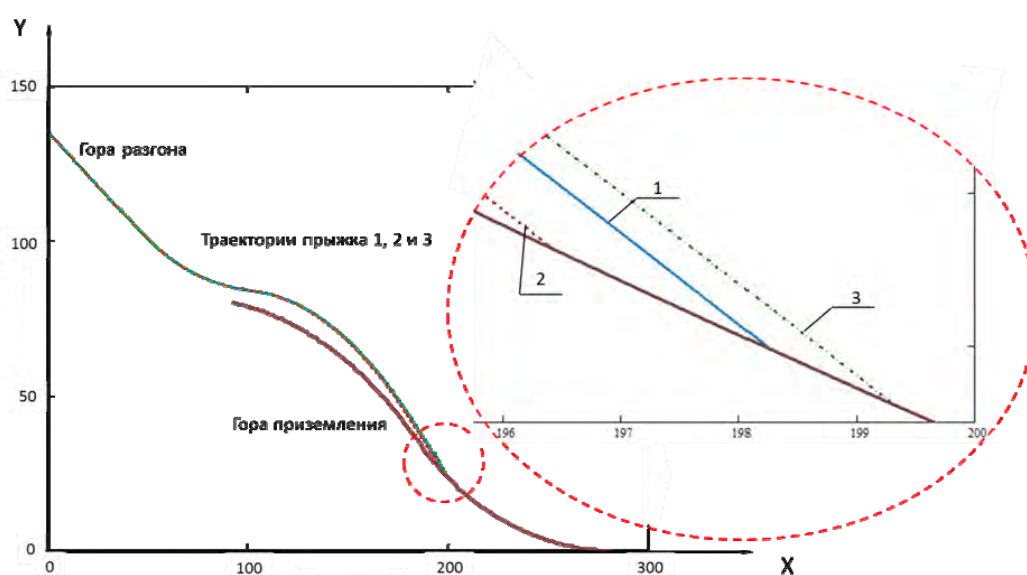


Рис. 11. Траектории прыжка лыжника для разных положений спортсмена на разгонном участке: 1 — положение спортсмена «разгон 1»; 2 — положение спортсмена «разгон 2»; 3 — положение спортсмена «разгон 3». Значения по осям — в метрах

Список литературы (References)

- Баталов А. Г., Раменская Т. И., Кубеев А. В., Храмов Н. А. Результаты приоритетных научных исследований на кафедре лыжного спорта в период 1993–1998 гг. // Теория и практика физической культуры. — 1998. — № 5. — С. 50–52.
Batalov A. G., Ramenskaya T. I., Kubeev A. V., Hramov N. A. Rezultati prioretetnih nauchnih issledovaniy na kafedre lignogo sporta v period 1993–1998 gg. [The results of the priority scientific research at the Department of ski sports during the period 1993–1998] // Theory and practice of physical culture. — 1998. — No. 5. — P. 50–52 (in Russian).
- Боженинов О. М. Факторы, влияющие на результат в прыжках с трамплина на лыжах и эволюцию техники полета // Теория и практика физической культуры. — 1995. — № 1. — С. 37–40.
Bogeninov O. M. Faktori, vliyayushchie na rezultat v prigkakh na ligah i evolyuciyu tehniky polyeta [The factors influencing the result in ski jumping and the evolution of flight technique] // Theory and practice of physical culture. — 1995. — No. 1. — P. 37–40 (in Russian).
- Боженинов О. М., Жиляков А. А. Основные направления совершенствования техники прыжка на лыжах. — М.: ЦНИС, РГАФК, 1993. — 106 с.
Bogeninov O. M., Gilyakov A. A. Osnovnie napravleniya soverchenstvovsniya tehniky prigka na ligah [The main directions of improvement ski jump technology]. — Moscow: ZNIS, RGAFK, 1993. — 106 p. (in Russian).
- Грозин Е. А. Прыжки с трамплина. — М.: Физкультура и спорт, 1971.
Grozin E. A. Prigki s tramlina [Ski jumping]. — Moscow: Phizkultura i sport, 1971 (in Russian).
- Маркес П., Гримшоу П. Механика прыжков на лыжах: аэродинамика стабильности. — 2010. — С. 26. URL: http://www.vniifk.ru/content/files/nir/metod_zima_2010.pdf (дата обращения: 22.12.2016).
Markes P., Grimshou P. Mehanika prigkov na ligah: aerodinamika stabilnosti. — 2010. — P. 26 (in Russian). Available at: http://www.vniifk.ru/content/files/nir/metod_zima_2010.pdf (accessed 22.12.2016).
- Петров В. А., Гагин Ю. А. Механика спортивных движений. — М.: Физкультура и спорт, 1974.
Petrov V. A., Gagin Yu. A. Mehanika sportivnih dvizheniy [Mechanics of sports movements]. — Moscow: Phizkultura i sport, 1974 (in Russian).
- Подгаец А. Р. Математическое моделирование прыжка на лыжах с трамплина: Дис. канд. физ.-мат. наук / А. Р. Подгаец; рук. работы Ф. М. Сергеев. — М.: МИФИ, 2007. — 135 с.
Podgayets A. R. Matematicheskoe modelirovanie prigka na ligah s tramlina: Dis. kand. phys.-mat. nauk / A. R. Podgayets; ruk. raboti: F. M. Sergeev. — Moscow: MIFI, 2007. — 135 p. (in Russian).

- Подгаец А. Р., Рудаков Р. Н.* Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина // Российский журнал биомеханики. — 2000. — Т. 4, № 2. — С. 20–30.
Podgayets A. R., Rudakov R. N. Biomechanical problems of ski jumping // Russian journal of biomechanics. — 2000. — Vol. 4, no. 2. — P. 20–30. (Original Russian paper: *Podgayets A. R., Rudakov R. N.* Biomechanicheskie problemy prigka na ligah s tramplina // Rossiyskiy gurnal biomehaniki. — 2000. — Vol. 4, no. 2. — P. 20–30.)
- Рудаков Р. Н.* Динамика спортивных снарядов и спортсменов в сопротивляющейся среде // Российский журнал биомеханики. — 2007. — Т. 11, № 4. — С. 61–83.
Rudakov R. N. Dynamics of sports equipment and athletes in a resisting medium // Russian journal of biomechanics. — 2007. — Vol. 11, no. 4. — P. 61–83. (Original Russian paper: *Rudakov R. N.* Dinamika sportivnih snaryadov i sportsmenov v soprotivlyayuscheysya srede // Rossiyskiy gurnal biomehaniki. — 2007. — Vol. 11, no. 4. — P. 61–83.)
- Рудаков Р. Н., Галёв П. П., Василенко С. В., Шульгин П. В.* Косвенное определение аэродинамического сопротивления при скоростном спуске на лыжах // Российский журнал биомеханики. — 2000. — Т. 4, № 2. — С. 31–35.
Rudakov R. N., Galyev P. P., Vasilyenko S. V., Shulgin P. V. Indirect determination of the aerodynamic drag during the downhill skiing // Russian journal of biomechanics. — 2000. — Vol. 4, no. 2. — P. 31–35. (Original Russian paper: *Rudakov R. N., Galyev P. P., Vasilyenko S. V., Shulgin P. V.* Kosvennoe opredelenie aerodinamicheskogo soprotivleniya pri skorostnom spuske na ligah // Rossiyskiy gurnal biomehaniki. — 2000. — Vol. 4, no. 2. — P. 31–35.)
- FlowVision — руководство пользователя. — Режим доступа: http://www.flowvision.ru/phocadownload/PublicDownloads/Documentation/fvrus_30802.pdf/ (проверено 20.09.2016). — Загл. с экрана.
- Federolf P.* Finite element simulation of a carving snow ski. Swiss Federal institute of technology Zurich. for the degree of Doctor of Technical Sciences 2005.
- Logar G.* Estimation of Joint Forces and Moments for the In-Run and Take-Off in Ski Jumping Based on Measurements with Wearable Inertial Sensors // Sensors. — 2015. — Vol. 15. — P. 11258–11276. Doi:10.3390/s150511258
- Mössner M., Hasler M., Schindelwig K., Kaps P., Nachbauer W.* An approximate simulation model for initial luge track design Original Research Article // Journal of Biomechanics. — 2011. — Vol. 44, no. 5. — P. 892–896.
- Norstrud H.* (Ed.) Sport Aerodynamics. CISM Courses and Lectures // Springer. NewYork. — 2008. — Vol. 506. — P. 183–216, 217–228.
- Schenau I.* The influence of air friction in speed skating Original Research Article // Journal of Biomechanics. — 1982. — Vol. 15, no. 6. — P. 449–458.
- Virmavirtaa M., Kivekas J., Komi P.* Take-off aerodynamics in ski jumping // Journal of Biomechanics. — 2001. — Vol. 34, no. 4. — P. 465–470.