

РЕАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ СРЕД В SIMULIA/ABAQUS 6.9

Извеков О.Я. к.ф.-м.н., Селицкий А.А., Крупеник А.М.
Московский физико-технический институт, г.Долгопрудный, Россия

Теория континуального разрушения (теория поврежденности) дает феноменологическое описание эволюции рассеянных дефектов – микротрещин, число которых в любом элементарном объеме предполагается весьма большим, что позволяет описывать этот процесс с помощью осредненного параметра – поврежденности. Главное преимущество теории поврежденности перед теориями прочности заключается в учете предыстории нагружения, предшествующей макроскопическому разрушению. Этот подход, предложенный в середине шестидесятых годов прошлого столетия Качановым Л.М. [1] и Работновым Ю.Н. [2], получил интенсивное развитие в многочисленных работах отечественных и зарубежных исследователей.

В конце девяностых годов двадцатого века в работах Фортова В.Е и Кондаурова В.И. [3] была разработана модель сплошной повреждающейся среды, которая ассоциирует параметр поврежденности с необратимыми потерями термомеханических форм энергии, связанными с образованием новых поверхностей при развитии микротрещин.

Формулировка модели

Математическая модель в приближении постоянной температуры и малых деформаций формулируется следующим образом. Стандартные уравнения для механики деформируемого твердого тела должны быть дополнены определяющими соотношениями, характеризующими конкретные свойства рассматриваемой среды:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{e}, \omega), \quad \mathbf{y} = \rho \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{e}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{e}, \omega) = u_e(\mathbf{e}, \omega) + u_\omega(\omega)$ - сумма упругого потенциала и поверхностной энергии микротрещин, \mathbf{y} - тензор напряжений, \mathbf{e} - тензор малых деформаций, ρ - плотность среды, $\omega = \omega(x, y, z)$ - параметр поврежденности, для которого необходимо формулировать кинетическое уравнение. В рассматриваемой модели принимается следующий вид кинетического уравнения:

$$d\omega/dt = -\frac{1}{\tau\beta} \langle du(\mathbf{e}, \omega)/d\omega \rangle, \quad \text{где } \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

которое означает, что скорость накопления поврежденности определяется балансом работы, которую нужно затратить на образование новых поверхностей, и освобождающейся при этом упругой энергии. Если упругой энергии выделяется больше, чем необходимо затратить на появление новых микротрещин, то ω будет накапливаться. В некотором смысле этот критерий аналогичен критерию распространения изолированной трещины в теории Гриффитса. Параметр τ - время релаксации.

В случае однородной изотропной среды

$$\mathbf{u}(\mathbf{e}, \omega) = u_\omega(\omega) + 1/2 K I_1^2 + \mu J^2 - \alpha \omega I_1 - \alpha_J \omega J, \quad (3)$$

где K - модуль объемного сжатия, μ - модуль сдвига, $I_1 = e_{ij} \delta_{ij}$ - первый инвариант тензора малых деформаций, J - интенсивность касательных деформаций, α и α_J - положительные константы, характеризующие разгрузку упругой энергии при развитии поврежденности. $u_\omega(\omega) = \gamma\omega + 1/2 \beta\omega^2$ - поверхностная энергия микротрещин, где γ и β - положительные константы.

Подстановка (3) в (1) дает выражение для тензора напряжений:

$$\mathbf{y} = \rho \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{e} = (K I_1 - \alpha \omega) \mathbf{I} + (2\mu - \alpha_J \omega / J) \mathbf{e}, \quad (4)$$

где \mathbf{I} - единичный тензор второго ранга с компонентами δ_{ij} , $\mathbf{e}_{ij} = e_{ij} - 1/3 I_1 \delta_{ij}$ - девиатор тензора малых деформаций.

Кинетическое уравнение принимает вид:

$$d\omega/dt = \langle \alpha I_1 + \alpha_J J - \gamma - \beta \omega \rangle / \tau \beta \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует наличие пороговых деформаций, при которых начинает накапливаться поврежденность. Условия $\dot{\omega} > 0$ и $\omega = 0$ дают

$$\alpha I_1 + \alpha_J J - \gamma > 0 \quad (6)$$

На полуплоскости ($I_1, J \geq 0$) условие определяет область, где деформирование материала сопровождается развитием поврежденности, и область чисто упругого поведения.

Рассмотренная модель была реализована в [Simulia/ABAQUS 6.9](#) с помощью пользовательских подпрограмм UMAT и VUMAT и протестирована на характерных примерах. Рассматривались одномерные, двумерные и трехмерные задачи.

В одномерном случае соотношения (4) – (5) принимают особенно простой вид:

$$\sigma = E e - \alpha \omega, \quad (7)$$

$$\dot{\omega} = \langle \alpha e - \gamma - \beta \omega \rangle / \tau \beta, \quad (8)$$

где E - модуль Юнга. Пороговая деформации $e^* = \gamma / \alpha$, пороговое напряжение $\sigma^* = E e^*$.

Квазистатическое растяжение стержня

Рассматривается стержень, один конец которого закреплен, а к другому прикладывается растущая по линейному закону нагрузка, так что $\sigma = st$. В этом случае задача имеет аналитическое решение:

$$\omega = B \left[\Delta t - (1 - \exp(-A\Delta t)) / A \right],$$

где $A = (E\beta - \alpha^2) / E\beta\tau$, $B = s\alpha / (E\beta - \alpha^2)$, $\Delta t = t - t^*$, $t^* = e^* E / s$.

Для расчетов квазистатических процессов используется расчетный модуль [ABAQUS/Standard](#) и подпрограмма UMAT [5]. Для решения задачи (7) – (8) были взяты следующие значения параметров $\alpha/E = \beta/E = 0.48$, $\gamma/E = 0.0048$, в этом случае критическая деформация $e^* = 0.01$. На рис.1 и 2 представлены результаты расчетов для различных τ . Сплошные линии соответствуют аналитическому решению, значки – численному расчету в ABAQUS/Standard. Кривая напряжение – деформация при развитии поврежденности лежит между двумя пределами: прямая с первоначальным наклоном при бесконечно медленной реакции ($\tau \rightarrow \infty$) и прямая с меньшим наклоном в случае мгновенной кинетики ($\tau \rightarrow 0$). Меньший наклон свидетельствует о кажущемся уменьшении модуля Юнга в процессе накопления поврежденности.

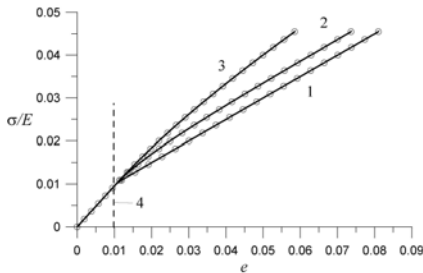


Рисунок 1 Зависимость напряжения от деформации.
1 - $\tau = 0.01$, 2 - $\tau = 0.1$, 3 - $\tau = 0.5$, 4 – предел упругости

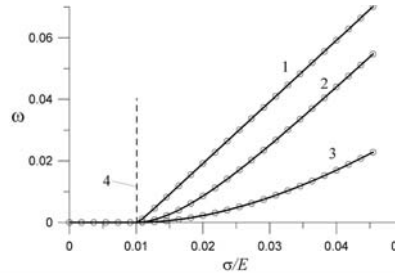


Рисунок 2 Зависимость поврежденности от напряжения
1 - $\tau = 0.01$, 2 - $\tau = 0.1$, 3 - $\tau = 0.5$, 4 – предел упругости

Внезапное растяжение стержня

При внезапном растяжении стержня нагрузкой, превышающей предел упругости, вдоль стержня распространяется волновая структура, состоящая из упругого предвестника с амплитудой равной пределу упругости, и отстающей от него волны с амплитудой приложенной нагрузки. В пределе быстрой кинетики ($\tau \rightarrow 0$) эта структура представляет собой две ступеньки в координатах (σ, x) , которые распространяются с различными скоростями (что определяется двумя наклонами графика напряжение - деформация).

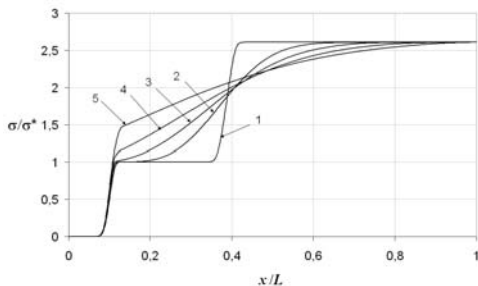


Рисунок 3 Волновые структуры.
1 - $\tau = 0.01$, 2 - $\tau = 2$, 3 - $\tau = 5$, 4 - $\tau = 10$,
5 - $\tau = 20$

Для моделирования динамических процессов используется расчетный модуль [ABAQUS/Explicit](#) и подпрограмма VUMAT [5].

На рис.3 показаны рассчитанные волновые структуры в один и тот же момент времени при различных значениях τ . Зафиксирован левый край, нагрузка приложена к правому краю, волны бегут справа налево.

Сферическая и цилиндрическая полость в напряженном материале

Для двумерного и трехмерного случая была проведена серия расчетов квазистатической задачи накопления поврежденности в окрестности цилиндрической и сферической полости в приближении мгновенной кинетики.

На рис.4 показаны области поврежденного материала в окрестности цилиндрической полости при различных граничных условиях: на внутренней стенке задано давление, достаточное для развития поврежденности, на бесконечности заданы разные сочетания напряжений σ_x и σ_y . Для расчета были взяты следующие значения параметров $\alpha/\mu = 0.56$, $\beta/\mu = 1.33$, $\gamma/E = 0.011$, $\alpha_j/\mu = 1.78$, $K/\mu = 2.0$.

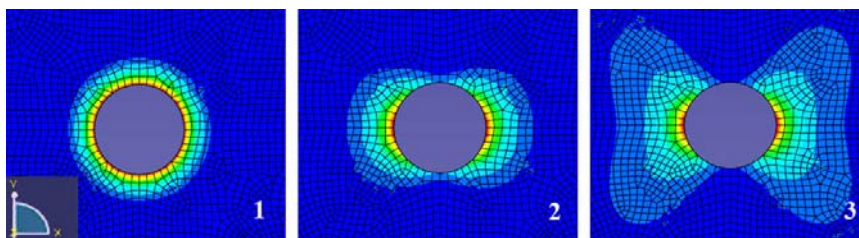


Рисунок 4 Зона поврежденности.

1 - $\sigma_x = \sigma_y = 0$, 2 - $\sigma_x/\mu = -0.03$, $\sigma_y/\mu = -0.045$, 3 - $\sigma_x/\mu = -0.03$, $\sigma_y/\mu = -0.06$

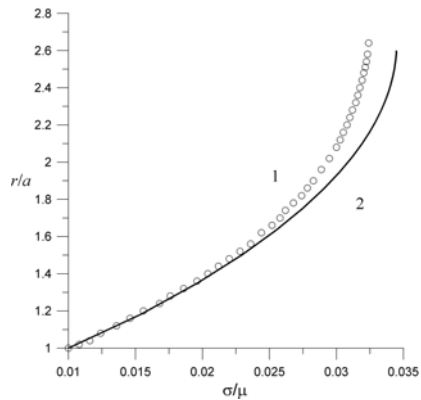


Рисунок 5 Зависимость радиуса поврежденной зоны от нагрузки.
1 – расчет, 2 – теория.

На рис.5 показана зависимость радиуса поврежденной зоны от давления на внутренней стенке сферической полости радиуса a . Внешняя граница расчетной области имела радиус $20a$ и была свободна от напряжений.

Характерной особенностью полученной зависимости является бесконечная производная при стремлении давления в полости к некоторому значению. Это означает, что при больших давлениях среда не может находиться в равновесии в рамках рассматриваемой модели, что можно трактовать как появление нарушений сплошности и макроскопического разрушения. Аналитически этот результат был получен в [3] и [4] для полости в безграничной среде. Отклонение расчета от теоретической зависимости в нелинейной области связано с влиянием внешней границы.

Выводы

Рассмотренная модель континуального разрушения была реализована в [Simulia/ABAQUS](#) 6.9 с помощью пользовательских подпрограмм UMAT и VUMAT и протестирована на характерных примерах. Численное решение тестовых задач находится в хорошем согласии с теоретическими оценками, что открывает дальнейшие перспективы использования рассмотренной модели в практических приложениях.

Работа выполнена в рамках Межвузовской комплексной работы «Инновационные технологии образования» (МКР ИТО).

Литература

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – С. 26 – 31.
2. Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения // Сб. "Вопросы прочности материалов и конструкций". – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5 – 7.
3. Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированных сред. – М.: МФТИ, 2002. – 336 с.
4. Извеков О.Я., Кондауров В.И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом. // Известия РАН. Физика Земли, – 2009. – №4. – С. 31 – 42.
5. Abaqus User Subroutines Reference Manual