

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ FLOWVISION

Сазонова М.Л., Шапоренко Е.В.  
ООО «ТЕСИС», г. Москва, Россия

Создание модели магнитной гидродинамики в программном комплексе FlowVision было вызвано интересом к численному исследованию течения электропроводящих жидкостей под воздействием электромагнитных полей в различных технических устройствах и даже биологических системах.

На данном этапе во FlowVision реализована стационарная модель решения уравнений Максвелла. Она применима для магнитных чисел Рейнольдса  $Re_m \ll 1$ .

Система уравнений магнитной гидродинамики состоит из уравнений неразрывности (1), Навье-Стокса (2), энергии (3), стационарных уравнений Максвелла (4)-(7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{eff} + \mathbf{F}_L, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} H) = \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{\lambda}{C_p} (\nabla H - \mathbf{V} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{V})) \right) + Q_{Joule}, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla \varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \varphi = \nabla \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_a \cdot \sigma(-\nabla \varphi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (7)$$

Здесь:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{eff} = \mu \left( 2 \hat{\mathbf{S}} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \hat{\mathbf{I}} \right) - \text{эффективный тензор вязких напряжений,}$$

$\rho$  – плотность,  $t$  – время,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $P$  – давление,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,

$\hat{\mathbf{S}}$  – тензор скоростей деформации,  $S_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$  – компоненты тензора скоростей деформации,  $\hat{\mathbf{I}}$

– единичный тензор,  $\mathbf{j}$  – плотность тока,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции,

$\varphi$  – электрический потенциал,  $\mathbf{A}$  – магнитный векторный потенциал.

Связь между уравнениями Максвелла и уравнениями движения и энергии осуществляется за счет источников членов в уравнениях Навье-Стокса и энергии:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \text{сила Лоренца,} \quad (8)$$

$$Q_{Joule} = j^2 / \sigma - \text{Джоулево тепло.} \quad (9)$$

Стационарная модель была протестирована на ряде задач, имеющих аналитическое решение: течение электрического тока в бесконечном проводнике, течение Куэтта, течение электропроводной жидкости в трубах круглого и прямоугольного сечения.

## Задача 1. Бесконечный проводник.

В бесконечном проводнике постоянного радиуса  $r_0$  течет постоянный электрический ток параллельно оси проводника, как показано на рисунке 1. Внутри проводника задана постоянная электропроводность.

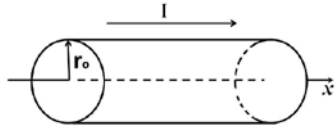


Рисунок 1. Бесконечный проводник.

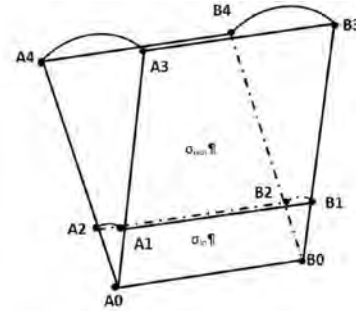


Рисунок 2. Расчетная область.

Вектор магнитного потенциала направлен вдоль оси симметрии проводника. Аналитические зависимости для составляющей  $A_x$  имеют вид [1]:

$$\begin{cases} A_{x,in} = A_0 - \frac{\mu_0 J_x r^2}{4}, & r \leq r_0 \\ A_{x,out} = A_0 - \frac{\mu_0 J_x r_0^2}{2r}, & r > r_0 \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $\mu_0$  - магнитная проницаемость в вакууме,  $J_x = I / \pi \cdot r_0^2$  - плотность электрического тока.

Угловая составляющая вектора магнитной индукции  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  определяется соответственно выражениями

$$\begin{cases} B_{\theta,in} = \frac{\mu_0 J_x r}{2}, & r \leq r_0 \\ B_{\theta,out} = \frac{\mu_0 J_x r_0^2}{2r}, & r > r_0 \end{cases} \quad (11)$$

Параметры задачи:  $I = 600$  А – интенсивность электрического тока,  $r_0 = 0.001$  м – радиус проводника,  $L = 0.1$  м – длина проводника,  $\sigma_{in} = 2700$  А/В·м – электропроводность внутри проводника,  $\sigma_{out} = 10^{-5}$  А/В·м – электропроводность вне проводника.

Вычисления проводились в двумерной секторной постановке (сектор  $4^\circ$ ), рисунок 2. Расчетная область состояла из двух областей, которые различались электропроводностью. Радиус внешней области  $R = 0.1$  м.

Граничные условия. На границах  $A_0A_1A_2$ ,  $A_1A_2A_3A_4$ ,  $B_1B_2B_3B_4$   $\partial\varphi/\partial n = 0$ ,  $\partial A/\partial n = 0$ ;  $B_0B_1B_2$  -  $\varphi = 707$ ,  $\partial A/\partial n = 0$ ;  $A_3A_4B_3B_4$   $\partial\varphi/\partial n = 0$ ,  $A = 0$ ; границы  $A_0B_0A_3B_3$  и  $A_0B_0A_4B_4$  – симметрия.

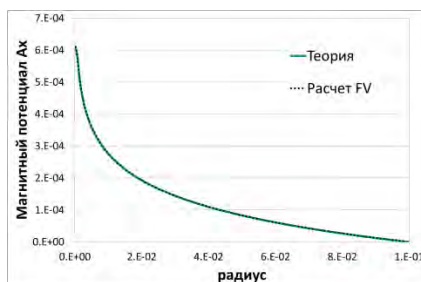


Рисунок 3. Распределение магнитного потенциала вдоль радиуса

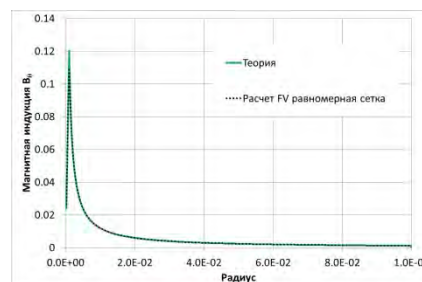


Рисунок 4. Распределение магнитной индукции вдоль радиуса

Расчетные профили модулей магнитного потенциала и магнитной индукции вдоль радиуса, как можно видеть на рисунках 3, 4, хорошо согласуются с аналитическими зависимостями (10)-(11). На рисунках 5, 6 представлены изолинии электрического потенциала, векторные поля магнитного потенциала и магнитной индукции.

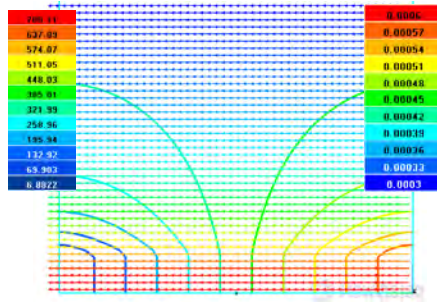


Рисунок 5. Электрический и магнитный потенциалы

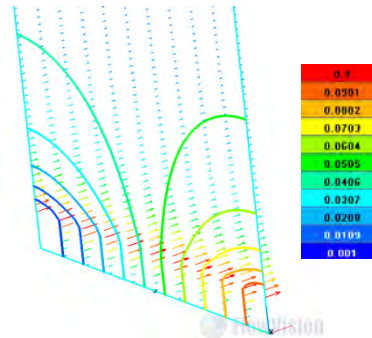


Рисунок 6. Электрический потенциал и магнитное поле

## Задача 2. Течение Куэтта.

В плоском канале ламинарное течение несжимаемой жидкости развивается под действием движения стенок канала в противоположных направлениях и под воздействием внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0 = (0, 1, 0)$  Тл, как показано на рисунке 7.

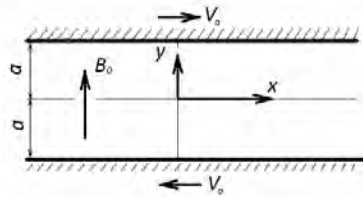


Рисунок 7. Течение Куэтта

Параметры задачи:

ширина канала  $2a = 0.02$  м,

плотность жидкости  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,

вязкость  $\mu = 0.001$  кг/м·с,

электропроводность  $\sigma = 1000$  А/В·м,

относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$ ,

относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1$ .

Скорость стенок  $v_0 = 0.01$  м/с. На боковых границах задано условие свободного выхода.

Число Гартмана  $Ha = B_0 a \sqrt{\sigma / \mu} = 20$ .

Профили безразмерных скорости, индуцированного магнитного поля и плотности тока вдоль оси OY описываются уравнениями [2]:

$$U = sh(Ha(1-y)) / sh(Ha), \quad (12)$$

$$B_x = ch(Ha(1-y)) / (Ha \cdot sh(Ha)), \quad (13)$$

$$j_z = -sh(Ha(1-y)) / sh(Ha). \quad (14)$$

Расчетные профили указанных величин, полученные в поперечном сечении канала, демонстрируют хорошее согласие с аналитическими (рисунки 8-10).

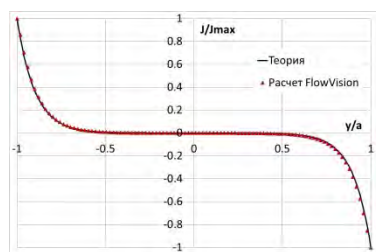


Рисунок 8. Профиль плотности индуцированного тока в поперечном сечении канала

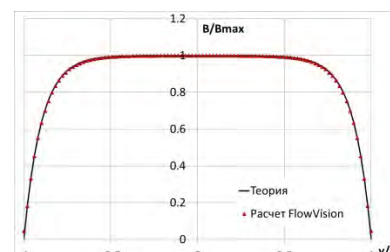


Рисунок 9. Профиль индуцированного магнитного поля в поперечном сечении канала

На рисунке 11 представлено поле скорости, полученное в расчете FlowVision.

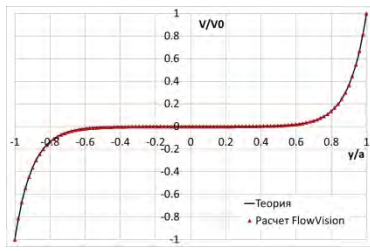


Рисунок 10. Профиль продольной скорости в поперечном сечении канала

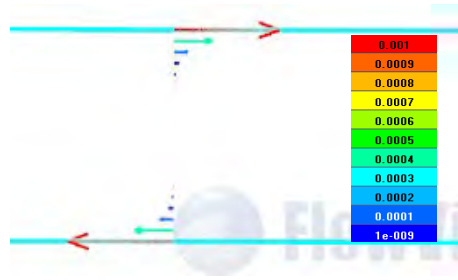


Рисунок 11. Поле скорости, расчет FlowVision

### Задача 3. Течение в круглой изолированной трубе .

В круглой трубе радиуса  $R=0.01$  м, длиной  $l=0.4$  м, во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0=(0, 1, 0)$  Тл течет несжимаемая жидкость, плотность которой  $\rho=1000$  кг/м<sup>3</sup>, вязкость  $\mu=0.001$  кг/м·с, электропроводность  $\sigma=1000$  А/В·м.

На входе и выходе задан перепад давления  $\Delta P=1$  Па. Для электрического и магнитного потенциала на всех границах задано условие  $\partial\varphi/\partial n = 0$ ,  $\partial A/\partial n = 0$ .

Предполагается, что магнитное число Рейнольдса  $Re_m = \mu\sigma UR \ll 1$ , число Гартмана  $Ha = B_0 R \sqrt{\sigma/\mu} = 10$ , число Рейнольдса  $Re=125$ .

Для числа Гартмана  $Ha \gg 1$  в работе [3] приведены асимптотические оценки по профилю скорости:

$$w_c = \frac{R^2 \Delta p}{\mu l Ha}, \quad \frac{w_{\perp B}}{w_c} = \sqrt{1-r^2}, \quad \frac{w_{\parallel B}}{w_c} = 1 - \exp(Ha \cdot (r-1)) \quad (15)$$

Здесь  $w_c$  - скорость в ядре потока.

Как видно из (15) профиль скорости вдоль направления, перпендикулярного к магнитному полю, не зависит от числа Гартмана, что на самом деле не так. В работе [3] приведены профили скорости в круглой изолированной трубе для различных значений  $B_0$ , откуда видно, что оценка (15) очень приближительная. На рисунках 12, 13 представлены профили безразмерной скорости в поперечном сечении трубы в перпендикулярном направлении к наложенному магнитному полю и в направлении наложенного магнитного поля.

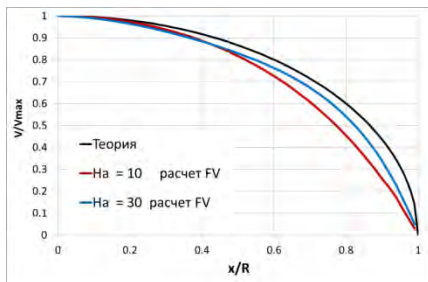


Рисунок 12. Профиль безразмерной скорости вдоль направления, перпендикулярного к магнитному полю

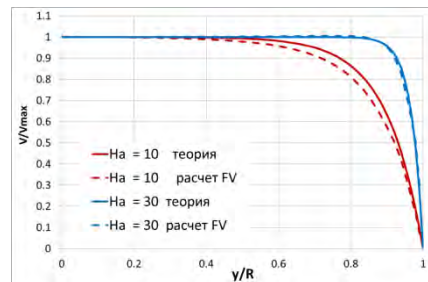


Рисунок 13. Профиль безразмерной скорости вдоль направления магнитного поля

На рисунке 14 представлено сравнение по коэффициенту сопротивления экспериментальных [2, 4] и расчетных данных.

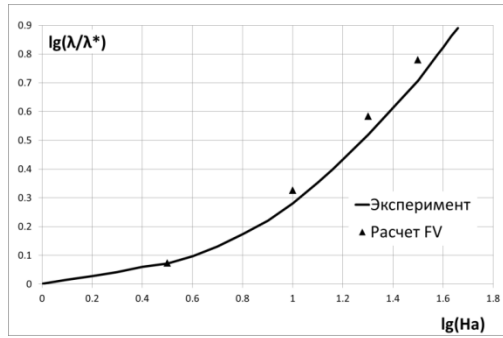


Рисунок 14. Коэффициент сопротивления изолированной трубы [4],  $\lambda^* = 64 / Re$

Распределение скорости в поперечном сечении трубы (стабилизированный участок) показано на рисунке 15, линии тока заряженных частиц - рисунке 16.

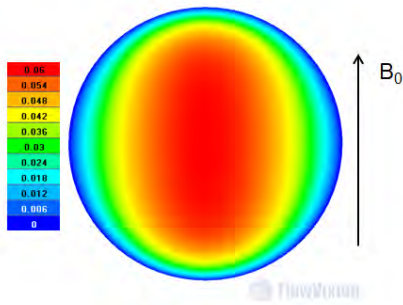


Рисунок 15. Распределение скорости, расчет FV,  $Ha=10$ ;  
 $V_{max\_theory}=0.0625$

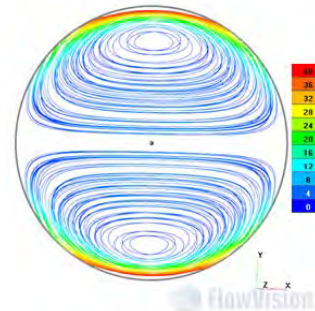


Рисунок 16. Линии тока заряженных частиц, расчет FV,  $Ha=10$  (раскраска по плотности тока)

#### Задача 4. Течение электропроводной жидкости в прямоугольной трубе.

В работе [5] рассматривается МГД течение проводящей жидкости Pb-17Li в трубопроводе прямоугольного сечения под действием наложенного перпендикулярно потоку магнитного поля  $B_0=0.3$  Тл (рисунок 17). Внешняя стенка трубопровода A1B1 – электропроводный материал LAFS, внутренняя A2B2 – может быть материалом, меняющим электропроводные свойства от полного изолятора до полностью проводящего вещества, назовем его алюминий. В данной работе рассмотрены случаи полностью проводящей и полностью изолированной трубы.

**Геометрия задачи:**  $b=0.012$  м,  $a=0.0066$  м, длина трубы  $L=1$  м, толщины стенок соответственно  $\delta_1=0.001$  м,  $\delta_2=0.0004$  м.

**Свойства веществ:**  $\rho_{Pb}=10000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_{Pb}=0.001$  кг/м·с,  $\sigma_{Pb}=0.76 \cdot 10^6$  А/(В·м);  $\sigma_{Al}=10^9$ ,  $10^9$  А/(В·м);  $\sigma_{LafS}=1.4 \cdot 10^6$  А/(В·м).

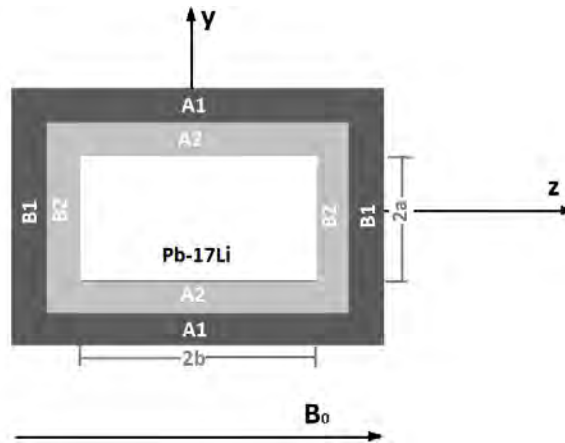


Рисунок 17. Расчётная область.

**Граничные условия:** на входе в расчетную область для Pb-17Li задана массовая скорость  $\rho \cdot U_0 = 1000$  кг/м<sup>2</sup>/с; на выходе – свободный выход.

На боковой стенке трубы задано условие прилипания. На границах раздела веществ задано сопряженное граничное условие для электрического и магнитного потенциалов.

Основным контрольным параметром является градиент давления  $dP/dx$ . В зависимости от электропроводности алюминия  $\sigma_{Al}$   $dP/dx$  вычисляется различным способом [5]:

$$\frac{dP}{dx} = \sigma_{pb} U_0 B_0^2 / Ha \quad - \text{ в изолированной трубе,} \quad (16)$$

$$\frac{dP}{dx} = \sigma_{pb} U_0 B_0^2 \quad - \text{ в проводящей трубе.} \quad (17)$$

*Случай проводящей трубы.* По теоретической оценке (17)  $dP/dx = 6440$  Па/м, в расчете FlowVision -  $dP/dx = 6445$  Па/м. В поперечном сечении в перпендикулярном внешнему магнитному полю направлению, скорость имеет М-образный профиль, который представлен на рисунке 18 (скорость нормирована к скорости в центре потока). График приведен в сравнении с теоретической оценкой [6]. Распределение нормированной скорости во всем сечении представлено на рисунке 19.

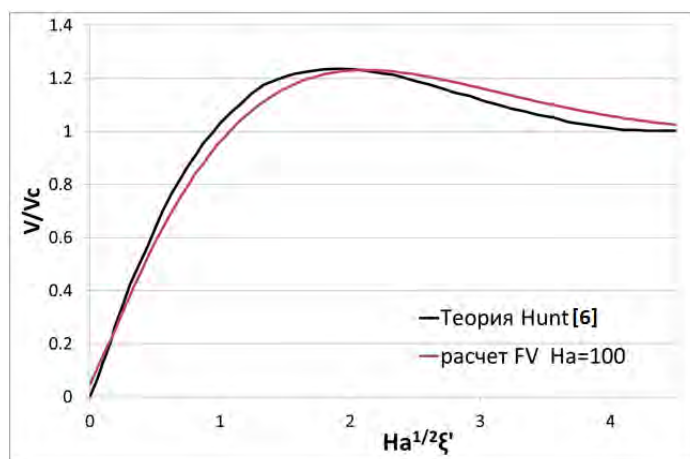


Рисунок 18. Проводящая труба, распределение скорости в поперечном сечении вдоль оси OY,  $z=0$ ,  $x=0.85$ ,  $\xi' = (a - y) / b$

В случае проводящей трубы контур электрического тока замыкается через стенки трубы. Поле электрического тока в поперечном сечении показано на рисунке 20.

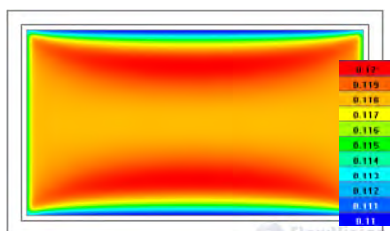


Рисунок 19. Проводящая труба, распределение нормированной скорости в поперечном сечении

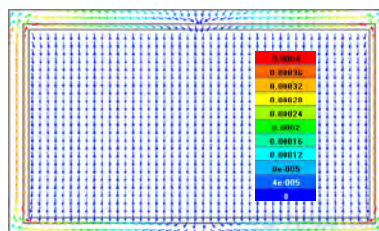


Рисунок 20. Проводящая труба, электрический ток в поперечном сечении

*Случай изолированной трубы.* По теоретической оценке  $dP/dx=69.1$  Па/м, в расчете FlowVision -  $dP/dx=75.5$  Па/м.

В этом случае не существует аналитических оценок профиля скорости. Распределение нормированной скорости представлено на рисунке 21. В изолированной трубе контур электрического тока замыкается через тонкие слои Гартмана. Поле электрического тока представлено на рисунке 22.

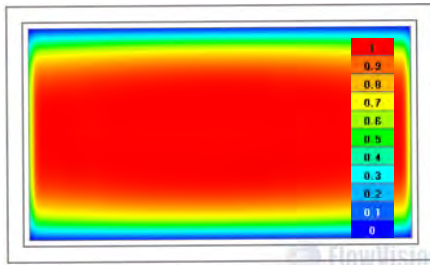


Рисунок 21. Изолированная труба, распределение нормированной скорости в поперечном сечении

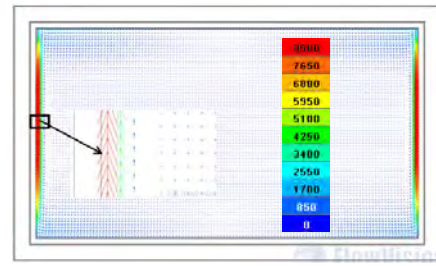


Рисунок 22. Изолированная труба, электрический ток

Для верификации стационарной модели Максвелла было проведено моделирование течения защитного газа при дуговой сварке неплавящимся вольфрамовым электродом.

Необходимость учёта электромагнитных явлений в численном исследовании тепловых процессов в защитном газе при горении сварочной дуги была продемонстрирована в работе [7]. Выполненные расчёты показали, что действие силы Лоренца на поток газа приводит к его радиальному сжатию под электродом и ускорению вдоль оси дуги, что определяет качество аргоновой защиты.

Подход к моделированию, разработанный в [7] при отсутствии модели МГД, ограничен в применимости к сложным объектам и реальным условиям сварки в силу необходимости ручного задания магнитного поля на основе упрощающих предположений и отсутствия точного определения плотности тока на торце электрода. Ниже приведены результаты решения рассматриваемой задачи с использованием новых реализованных возможностей.

### Задача 5. Моделирование течения защитного газа с учетом тепловых процессов при горении сварочной дуги

Для моделирования выбраны условия эксперимента [8, 9] (рисунок 23): сила сварочного тока 200 А, расстояние между электродом и свариваемой поверхностью 5 мм, диаметр электрода 3,2 мм, угол при вершине электрода 60°, диаметр сопла горелки 10 мм, вылет электрода 2мм, расход защитного газа (аргона) 10 л/мин.

Физические свойства аргона и воздуха существенно зависят от температуры, как показано на рисунках 24-26.

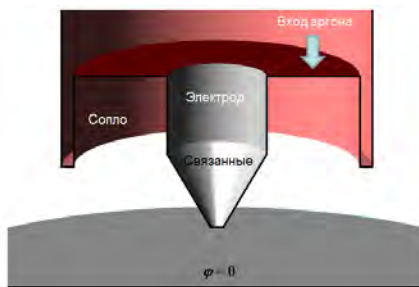


Рисунок 23. Схема модели

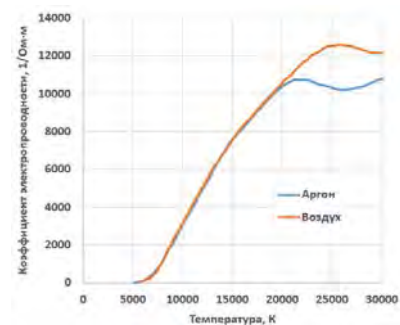


Рисунок 24. Зависимость коэффициента электропроводности от температуры

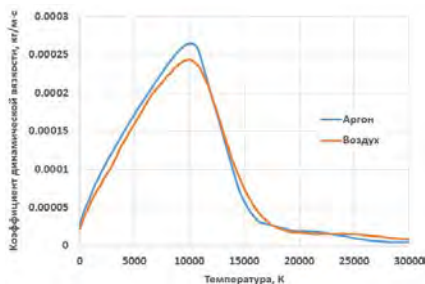


Рисунок 25. Зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры

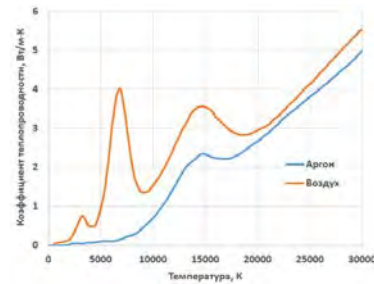


Рисунок 26. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

Задача решалась в сопряженной постановке. На границе Электрод/Аргон задавалось сопряженное граничное условие по температуре, электрическому и магнитному потенциалам. На торце электрода определен ток  $I=200$  А. На поверхности свариваемого материала установлено нулевое значение потенциала.

Картина течения, полученная в FlowVision, приведена на рисунке 27.

Соответствие полученного пространственного распределения областей высоких температур в сварочной дуге в сравнении с экспериментом показано на рисунке 28.

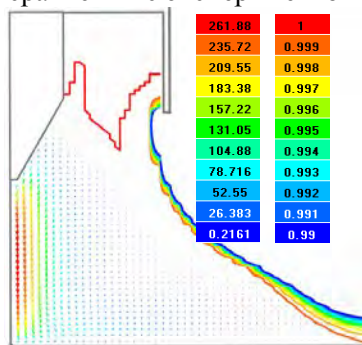


Рисунок 27. Поле скорости и концентрация аргона в дуге, расчет FlowVision

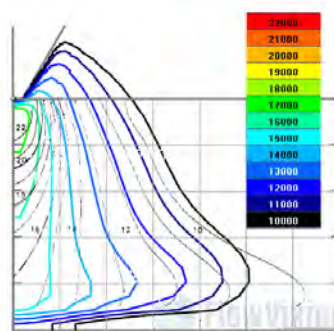


Рисунок 28. Распределение температуры в дуге, сравнение с экспериментом [9]

Распределение электрического потенциала, полученного во FlowVision, представлено на рисунке 29, поле магнитного потенциала - на рисунке 30.

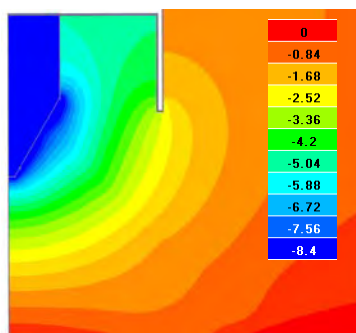


Рисунок 29. Электрический потенциал, расчет FlowVision

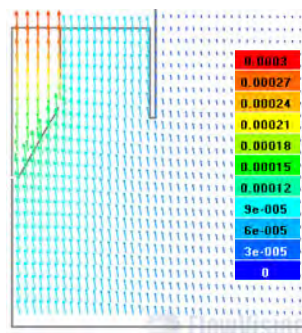


Рисунок 30. Магнитный потенциал, расчет FlowVision

### Заключение.

В программном комплексе FlowVision разработан новый функционал – решение стационарных уравнений Максвелла. Тестовые расчёты с использованием реализованной модели магнитогидродинамики показали хорошее согласие результатов расчетов с аналитическими решениями.

Использование новых возможностей позволило решить задачу исследования эффективности газовой защиты сварочной горелки с учетом переменного магнитного поля сварочной дуги и теплопереноса в металле с расчетом распределения плотности тока на торце электрода. Расчет верификационного примера показал согласие с экспериментальными данными.

### Список литературы.

1. M. Sass-Tisovskaya. Plasma Arc Welding Simulation with OpenFOAM. Thesis for licentiate of engineering. no. 2009:10 ISSN 1652-8565 Department of AppliedMechanics Chalmers University of Technology SE-412 96 Geteborg Sweden.
2. Танаев В.А. Течения в каналах МГД-устройств. - М.: Атомиздат, 1979, 368с.
3. S. Vantieghem, X. Albets-Chico, B. Кнаепен. The velocity profile of laminar MHD flows in circular conducting pipes. Theor. Comput. Fluid Dyn. (2009) 23: 525. doi:10.1007/s00162-009-0163-0
4. Бубенчиков А. М., Попонин В.С., Колесникова А.В. Течение электропроводящей жидкости в канале с частично проводящими стенками. Вычислительные технологии. 2006. Т 11, №1
5. Pranjal Jyoti Bhuyan and Kalyan S. Goswami. Effect of magnetic Field on MGD Pressure Drop Inside a Rectangular Conducting Duct. Transactions on Plasma Science. Vol. 36, No 4, August 2008J.



6. C. R. Hunt, "Magnetohydrodynamic flow in rectangular pipes," *J. Fluid Mech.*, vol. 21, pt. 4, pp. 577–590, 1965. J. C. R.
7. Сазонова М.Л., Микляев И.А., Федоров В.Ю., Шапоренко Е.В., Шмелев В.В. О разработке в программном комплексе FlowVision подхода к моделированию течения защитного газа при дуговой сварке // Материалы XV молодежной научно-технической конференции «Взгляд в будущее-2017», СПб – АО «ЦКБ МТ «Рубин», 2017, с. 617-623.
8. Haddad G.N., Farmer A.J.D. Temperature measurements in gas tungsten arcs, *Welding J*, 64, pp. 339-342, 1985.
9. Tsai M.C., Sindo Kou. Heat transfer and fluid flow in welding arcs produced by sharpened and flat electrodes, *Int. J. Heat mass transfer*, Vol. 33, No. 10, pp. 2089-2098, 1990.