РЕАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ СРЕД В SIMULIA/ABAQUS 6.9

Извеков О.Я. к.ф.-м.н., Селицкий А.А., Крупеник А.М.
Московский физико-технический институт, г.Долгопрудный, Россия

Теория континуального разрушения (теория поврежденности) дает феноменологическое описание эволюции рассеянных дефектов – микротрещин, число которых в любом элементарном объеме предполагается весьма большим, что позволяет описывать этот процесс с помощью осредненного параметра – поврежденности. Главное преимущество теории поврежденности перед теориями прочности заключается в учете предыстории нагружения, предшествующей макроскопическому разрушению. Этот подход, предложенный в середине шестидесятых годов прошлого столетия Качановым Л.М. [1] и Работновым Ю.Н. [2], получил интенсивное развитие в многочисленных работах отечественных и зарубежных исследователей.

В конце девяностых годов двадцатого века в работах Фортова В.Е и Кондаурова В.И. [3] была развита модель сплошной повреждающейся среды, которая ассоциирует параметр поврежденности с необратимыми потерями термомеханических форм энергии, связанными с образованием новых поверхностей при развитии микротрещин.

Формулировка модели

Математическая модель в приближении постоянной температуры и малых деформаций формулируется следующим образом. Стандартные уравнения для механики деформируемого твердого тела должны быть дополнены определяющими соотношениями, характеризующими конкретные свойства рассматриваемой среды:

$$u = u(\mathbf{e},\, \omega)\,,\ \mathbf{y} = \rho\, \partial u / \partial \mathbf{e}\,, \qquad (1)$$

где $u(\mathbf{e},\, \omega) = u_e(\mathbf{e},\, \omega) + u_\omega(\omega)$ - сумма упругого потенциала и поверхностной энергии микротрещин, $\mathbf{y}$ - тензор напряжений, $\mathbf{e}$ - тензор малых деформаций, ρ - плотность среды, $\omega = \omega(x, y, z)$ - параметр поврежденности, для которого необходимо формулировать кинетическое уравнение. В рассматриваемой модели принимается следующий вид кинетического уравнения:

$$d\omega/dt = -\frac{1}{\tau\beta}\left\langle du(\mathbf{e},\omega)/d\omega \right\rangle, \text{ где } \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}, \qquad (2)$$

которое означает, что скорость накопления поврежденности определяется балансом работы, которую нужно затратить на образование новых поверхностей, и освобождающейся при этом упругой энергии. Если упругой энергии выделяется больше, чем необходимо затратить на появление новых микротрещин, то ω будет накапливаться. В некотором смысле этот критерий аналогичен критерию распространения изолированной трещины в теории Гриффитса. Параметр τ - время релаксации.

В случае однородной изотропной среды

$$u(\mathbf{e},\, \omega) = u_\omega(\omega) + 1/2\, K I_1^2 + \mu J^2 - \alpha\omega I_1 - \alpha_J \omega J\,, \qquad (3)$$

где K - модуль объемного сжатия, μ - модуль сдвига, $I_1 = e_{ij}\delta_{ij}$ - первый инвариант тензора малых деформаций, J - интенсивность касательных деформаций, α и α_J - положительные константы, характеризующие разгрузку упругой энергии при развитии поврежденности. $u_\omega(\omega) = \gamma\omega + 1/2\,\beta\omega^2$ - поверхностная энергия микротрещин, где γ и β - положительные константы.

Подстановка (3) в (1) дает выражение для тензора напряжений:

$$\mathbf{y} = \rho\, \partial u / \partial \mathbf{e} = \left(K I_1 - \alpha\omega\right)\mathbf{I} + \left(2\mu - \alpha_J \omega / J\right)\mathbf{e}\,, \qquad (4)$$

где $\mathbf{I}$ - единичный тензор второго ранга с компонентами δ_{ij}, $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - 1/3\, I_1 \delta_{ij}$ - девиатор тензора малых деформаций.

Кинетическое уравнение принимает вид:

$$d\omega/d\,t = \left\langle \alpha I_1 + \alpha_J J - \gamma - \beta\omega \right\rangle / \tau\beta \qquad (5)$$

Из уравнения (5) следует наличие пороговых деформаций, при которых начинает накапливаться поврежденность. Условия $\dot{\omega} > 0$ и $\omega = 0$ дают

$$\alpha I_1 + \alpha_J J - \gamma > 0 \qquad (6)$$

На полуплоскости (I_1, $J \ge 0$) условие определяет область, где деформирование материала сопровождается развитием поврежденности, и область чисто упругого поведения.

Рассмотренная модель была реализована в Simulia/ABAQUS 6.9 с помощью пользовательских подпрограмм UMAT и VUMAT и протестирована на характерных примерах. Рассматривались одномерные, двумерные и трехмерные задачи.

В одномерном случае соотношения (4) – (5) принимают особенно простой вид:

$$\sigma = Ee - \alpha\omega\,, \qquad (7)$$

$$\dot{\omega} = \left\langle \alpha e - \gamma - \beta\omega \right\rangle / \tau\beta\,, \qquad (8)$$

где E - модуль Юнга. Пороговая деформации $e^* = \gamma/\alpha$, пороговое напряжение $\sigma^* = Ee^*$.

Квазистатическое растяжение стержня

Рассматривается стержень, один конец которого закреплен, а к другому прикладывается растущая по линейному закону нагрузка, так что $\sigma = st$. В этом случае задача имеет аналитическое решение:

$$\omega = B\left[\Delta t - \left(1 - \exp\left(-A\Delta t\right)\right)/A\right],$$

где $A = \left(E\beta - \alpha^2\right)/E\beta\tau$, $B = s\alpha/\left(E\beta - \alpha^2\right)$, $\Delta t = t - t^*$, $t^* = e^* E/s$.

Для расчетов квазистатических процессов используется расчетный модуль ABAQUS/Standard и подпрограмма UMAT [5]. Для решения задачи (7) – (8) были взяты следующие значения параметров $\alpha/E = \beta/E = 0.48$, $\gamma/E = 0.0048$, в этом случае критическая деформация $e^* = 0.01$. На рис.1 и 2 представлены результаты расчетов для различных τ. Сплошные линии соответствуют аналитическому решению, значки – численному расчету в ABAQUS/Standard. Кривая напряжение – деформация при развитии поврежденности лежит между двумя пределами: прямая с первоначальным наклоном при бесконечно медленной реакции ($\tau \to \infty$) и прямая с меньшим наклоном в случае мгновенной кинетики ($\tau \to 0$). Меньший наклон свидетельствует о кажущемся уменьшении модуля Юнга в процессе накопления поврежденности.

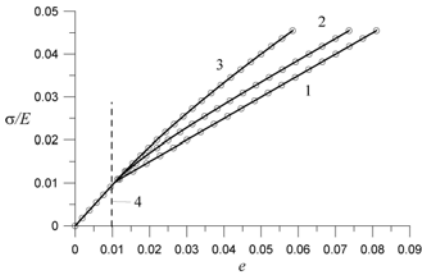

Рисунок 1 Зависимость напряжения от деформации.
1 - $\tau = 0.01$, **2** - $\tau = 0.1$, **3** - $\tau = 0.5$, **4 – предел упругости**

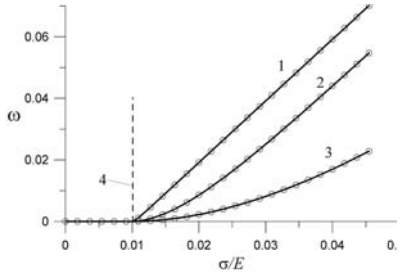

Рисунок 2 Зависимость поврежденности от напряжения
1 - $\tau = 0.01$, **2** - $\tau = 0.1$, **3** - $\tau = 0.5$, **4 – предел упругости**

Внезапное растяжение стержня

При внезапном растяжении стержня нагрузкой, превышающей предел упругости, вдоль стержня распространяется волновая структура, состоящая из упругого предвестника с амплитудой равной пределу упругости, и отстающей от него волны с амплитудой приложенной нагрузки. В пределе быстрой кинетики ($\tau \to 0$) эта структура представляет собой две ступеньки в координатах (σ, x), которые распространяются с различными скоростями (что определяется двумя наклонами графика напряжение - деформация).

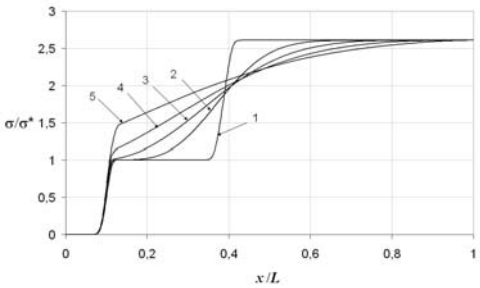

Рисунок 3 Волновые структуры.
1 - $\tau = 0.01$, **2** - $\tau = 2$, **3** - $\tau = 5$, **4** - $\tau = 10$, **5** - $\tau = 20$

Для моделирования динамических процессов используется расчетный модуль ABAQUS/Explicit и подпрограмма VUMAT [5].

На рис.3 показаны рассчитанные волновые структуры в один и тот же момент времени при различных значениях τ. Зафиксирован левый край, нагрузка приложена к правому краю, волны бегут справа налево.

Сферическая и цилиндрическая полость в напряженном материале

Для двумерного и трехмерного случая была проведена серия расчетов квазистатической задачи накопления поврежденности в окрестности цилиндрической и сферической полости в приближении мгновенной кинетики. На рис.4 показаны области поврежденного материала в окрестности цилиндрической полости при различных граничных условиях: на внутренней стенке задано давление, достаточное для развития поврежденности, на бесконечности заданы разные сочетания напряжений σ_x и σ_y. Для расчета были взяты следующие значения параметров $\alpha/\mu = 0.56$, $\beta/\mu = 1.33$, $\gamma/E = 0.011$, $\alpha_J/\mu = 1.78$, $K/\mu = 2.0$.

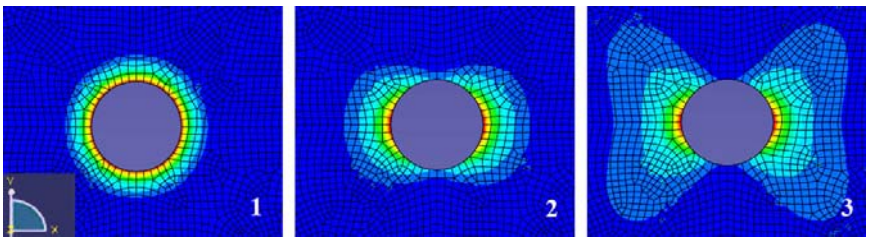

Рисунок 4 Зона поврежденности.

1 - $\sigma_x = \sigma_y = 0$, **2** - $\sigma_x/\mu = -0.03$, $\sigma_y/\mu = -0.045$, **3** - $\sigma_x/\mu = -0.03$, $\sigma_y/\mu = -0.06$

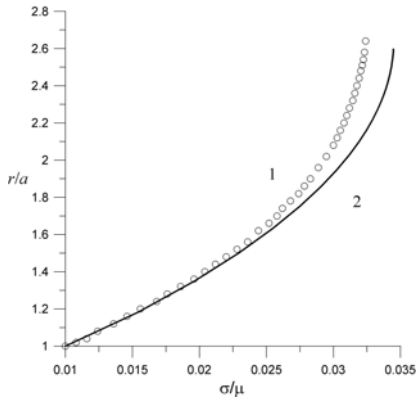

Рисунок 5 Зависимость радиуса поврежденной зоны от нагрузки. 1 – расчет, 2 – теория.

На рис.5 показана зависимость радиуса поврежденной зоны от давления на внутренней стенке сферической полости радиуса a. Внешняя граница расчетной области имела радиус $20a$ и была свободна от напряжений.

Характерной особенностью полученной зависимости является бесконечная производная при стремлении давления в полости к некоторому значению. Это означает, что при больших давлениях среда не может находиться в равновесии в рамках рассматриваемой модели, что можно трактовать как появление нарушений сплошности и макроскопического разрушения. Аналитически этот результат был получен в [3] и [4] для полости в безграничной среде. Отклонение расчета от теоретической зависимости в нелинейной области связано с влиянием внешней границы.

Выводы

Рассмотренная модель континуального разрушения была реализована в Simulia/ABAQUS 6.9 с помощью пользовательских подпрограмм UMAT и VUMAT и протестирована на характерных примерах. Численное решение тестовых задач находится в хорошем согласии с теоретическими оценками, что открывает дальнейшие перспективы использования рассмотренной модели в практических приложениях.

Работа выполнена в рамках Межвузовской комплексной работы «Инновационные технологии образования» (МКР ИТО).

Литература

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – С. 26 – 31.
2. Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения // Сб. ”Вопросы прочности материалов и конструкций”. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5 – 7.
3. Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированных сред. – М.: МФТИ, 2002. – 336 с.
4. Извеков О.Я., Кондауров В.И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом. // Известия РАН. Физика Земли, – 2009. – №4. – С. 31 – 42.
5. Abaqus User Subroutines Reference Manual